

SOLUÇÕES GEOTÉCNICAS COM APLICAÇÃO DE LINHAS DE DESLIZAMENTO EM PROBLEMAS DE PLASTICIDADE

Prof. Marcos Fábio Porto de Aguiar
Universidade de Fortaleza
marcosporto@unifor.br

RESUMO

Apresentam-se, neste artigo, soluções práticas para problemas de plasticidade, com a determinação da carga de colapso em estruturas geotécnicas, considerando o Método das Linhas de Deslizamento. São abordados, especificamente para o método, os conceitos básicos matemáticos e procedimentos para obtenção da geometria. Partindo das linhas de deslizamentos e dos parâmetros de resistência do solo são mostrados exemplos práticos de determinação da capacidade de carga para fundações e estabilidade de taludes. Comprova-se, considerando suas limitações, a utilidade do método para situações usuais em geotecnia.

Palavras-Chave: Plasticidade, linhas de deslizamento, geotecnia, fundações, estabilidade de taludes.

ABSTRACT

This Paper presents practical solutions for plasticity problems, with the determination of collapse load in geotechnical structures, considering the Slip Line Method. It is approached, specifically for the method, the mathematical basic concepts and procedures to get the geometry. Starting of the slip line and of the soil shear parameters, practical examples of load capacity determination are shown for foundations and slope stability. It is proven, considering their limitations, the usefulness of the method for geotechnical usual situations.

Keywords: Plasticity, slip line, geotechnique, foundation, slopes stability.

1. INTRODUÇÃO

Existem muitas soluções para os problemas de limite elástico linear, no entanto, soluções exatas para problemas de valor limite que envolvem as deformações plásticas dos solos são bem restritas.

Para fins práticos em problemas de engenharia, normalmente procura-se determinar as deformações que ocorrem no regime elástico e a carga de colapso. As primeiras podem ser determinadas a partir da Teoria da Elasticidade. Para determinação da carga de colapso, em problemas de geotecnia, usualmente

adota-se um dos métodos seguintes:

- Método das linhas de deslizamento;
- Método do equilíbrio limite;
- Método da análise limite.

O presente trabalho trata do problema plástico em solos, considerando o método das linhas de deslizamento, assim como abordado por MENDELSON (1968), WU (1970), CHEN (1975), ATKINSON (1981) e DIRCEU et al. (1998).

O estudo matemático da plasticidade apresentou um salto no início do século XX com a derivação das equações das linhas de deslizamento para o caso de deformações planas. PRANDTL (1920) foi o primeiro a obter uma solução de forma analiticamente fechada para estas equações no caso de fundações em solos sem considerar seu peso ($\gamma=0$). Seus resultados foram ampliados posteriormente para problemas particulares de capacidade de carga de fundações em solos, com $\gamma=0$, onde as linhas de deslizamento, de pelo menos um grupo, são retas e a solução tem forma fechada.

Porém, a importante inclusão do peso do solo torna a solução matemática consideravelmente mais complexa e muitos métodos aproximados vinham sendo desenvolvidos. SOKOLOWSKII (1965) adotou uma técnica numérica baseada em aproximações por diferenças finitas das equações das linhas de deslizamento. Ele obteve soluções para um bom número de problemas em capacidade de carga em fundações e taludes, assim como pressões de terra em paredes de contenção, para os quais não era possível a obtenção de soluções fechadas. Resultados com técnicas gráficas, formas aproximadas que incluíam a aplicação de métodos de perturbação e métodos de expansão de séries também foram apresentados por pesquisadores na mesma época.

2. PLASTICIDADE EM SOLOS - LINHAS DE DESLIZAMENTO

O escoamento plástico iminente do solo ocorre quando uma região deste, suficientemente grande, sob a fundação é carregada até sua condição limite. No momento de escoamento plástico iminente, ambos, o equilíbrio e a condição de escoamento, são satisfeitos na região próxima a fundação. Em solo, o critério de Coulomb é amplamente usado para esta condição de ruptura. Combinando-se o critério de Coulomb com as equações diferenciais de equilíbrio plástico na região, juntamente com as condições de tensões limites, tem-se um grupo de equações que pode ser usado para investigar as tensões no solo, abaixo de uma fundação ou atrás de uma parede de contenção no momento iminente do escoamento plástico. Para resolver problemas específicos, é conveniente transformar este grupo de equações para coordenadas curvilíneas, pois as direções dos pontos nesta região de escoamento coincidem com as direções de ruptura ou planos de deslizamento. Essas direções de deslizamento são conhecidas como linhas de deslizamento e a rede é chamada de campo de linhas de deslizamento.

Quando as tensões no solo ocorrem de forma que os eixos principais possuam a mesma direção para todos os pontos, pode-se, então, dizer que a superfície de ruptura consiste em

dois grupos de planos, comumente denominados α e β .

Por outro lado, em vários outros problemas, ocorrem casos em que as direções dos eixos principais variam de ponto para ponto e proporcionam uma superfície de escoamento curva. Tomando-se como exemplo o acréscimo de tensões sob uma fundação corrida, que no momento do escoamento plástico da massa de solo alcança a sua condição limite e, portanto, tem as condições de equilíbrio e escoamento satisfeitas na região próxima da fundação a solução apresentada, é uma combinação do critério de ruptura, segundo Mohr-Coulomb, $s = c + \alpha \tan$, com as condições de equilíbrio, que são escritas em forma diferencial. A teoria da linha de deslizamento faz três suposições restritivas, como segue:

- Deformação plana de tensão;
- Carregamento “quasi-estático”;
- O sólido é idealizado como de comportamento rígido-plástico perfeito.

Em duas dimensões, as equações diferenciais de equilíbrio são:

$$\left. \begin{aligned} \frac{\partial \sigma_x}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{xy}}{\partial y} &= X \\ \frac{\partial \sigma_y}{\partial y} + \frac{\partial \tau_{xy}}{\partial x} &= Y \end{aligned} \right\} \quad (1)$$

Os termos X e Y são forças do corpo, ou peso, por unidade de volume.

O critério de ruptura é aqui definido por,

$$s = c + \sigma \tan \phi \quad (2)$$

Para se combinar em (1) e (2), transforma-se a equação do critério de ruptura, de acordo com as operações a seguir. As tensões de ruptura são descritas pelo círculo de Mohr (Figura 01-a).

Do círculo de Mohr:

$$ac = \frac{1}{2}(\sigma_1 + \sigma_3) + c \cdot \cot \phi \quad (3)$$

$$ac = \frac{1}{2}(\sigma_1 - \sigma_3) \quad (4)$$

Através de relações geométricas, pode-se escrever:

$$\left. \begin{aligned} \frac{1}{2}(\sigma_1 + \sigma_3) &= \left[\frac{1}{2}(\sigma_1 + \sigma_3) + c \cdot \cot \phi \right] - c \cdot \cot \phi \\ \frac{1}{2}(\sigma_1 - \sigma_3) &= \left[\frac{1}{2}(\sigma_1 + \sigma_3) + c \cdot \cot \phi \right] \tan \phi \end{aligned} \right\} \quad (5)$$

Se o eixo principal “1” é inclinado formando um ângulo ψ com os eixos das abscissas, pode-se escrever:

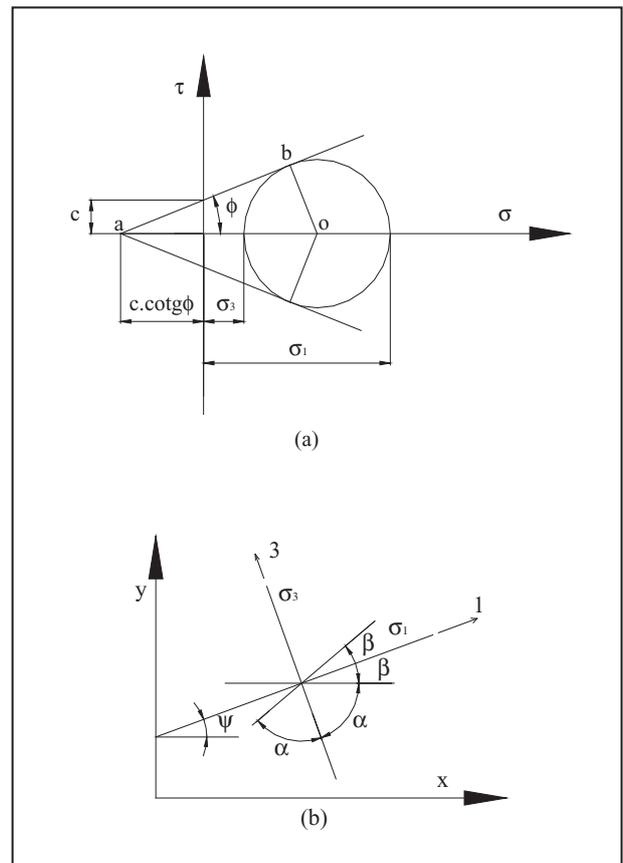


Figura 1 - (a) círculo de Mohr de tensões na ruptura e (b) planos de deslizamento e eixos principais no plano xy

Então, obtém-se o sistema de equações (7) que é a condição de ruptura expressa em termos de $\sigma_x, \sigma_y, \tau_{xy}, \sigma_1, \sigma_3$. As direções das linhas de deslizamento e dos eixos principais, no plano xy, estão ilustradas na Figura 01-b.

$$\left. \begin{aligned} \sigma_x = \sigma_y &= \left[\frac{1}{2}(\sigma_1 + \sigma_3) + c \cdot \cot g \phi \right] (1 \pm \sin \phi \cos 2\psi) - c \cdot \cot g \phi \\ \tau_{xy} &= \left[\frac{1}{2}(\sigma_1 + \sigma_3) + c \cdot \cot g \phi \right] \sin \phi \cos 2\psi \end{aligned} \right\} \quad (7)$$

As equações dos sistemas (1) e (7) são as equações básicas que podem ser combinadas, obtendo-se então:

$$\sigma_a = \frac{(\sigma_1 + \sigma_3)}{2} + c \cdot \cot g \phi \quad (8)$$

Substituindo as equações (7) e (8) em (1) e (2), obtém-se:

$$\begin{aligned}
 & (1 + \sin \phi \cos 2\psi) \frac{\partial \chi}{\partial x} + \\
 & \sin \phi \sin 2\psi \frac{\partial \chi}{\partial y} - \\
 & \cos \phi (\sin 2\psi \frac{\partial \psi}{\partial x} - \cos 2\psi \frac{\partial \psi}{\partial y}) \\
 & = \frac{\cot g \phi}{2\sigma_a} X
 \end{aligned} \tag{9}$$

$$\begin{aligned}
 & \sin \phi \sin 2\psi \frac{\partial \chi}{\partial x} + \\
 & (1 - \sin \phi \cos 2\psi) \frac{\partial \chi}{\partial y} + \\
 & \cos \phi (\sin 2\psi \frac{\partial \psi}{\partial x} + \cos 2\psi \frac{\partial \psi}{\partial y}) \\
 & = \frac{\cot g \phi}{2\sigma_a} Y
 \end{aligned} \tag{10}$$

sendo,

$$\chi = \frac{\cot g \phi}{2} \ln \frac{\sigma_a}{c} \tag{11}$$

As equações (9) e (10), podem ser simplificadas, introduzindo-se as novas variáveis ξ e ν , como será mostrado a seguir. Observa-se que as variáveis ξ e ν contêm um termo de tensão χ mais o termo ψ , que indicam a direção da tensão principal. Se ξ e ν são conhecidos em um ponto, então as tensões são prontamente encontradas.

$$\xi = \chi + \psi \quad \nu = \chi - \psi \tag{12}$$

Então, as equações (9) e (10) ficam:

$$\left. \begin{aligned}
 \frac{\partial \xi}{\partial x} + \operatorname{tg}(\psi + \beta) \frac{\partial \xi}{\partial y} &= -b \\
 \frac{\partial \nu}{\partial x} + \operatorname{tg}(\psi - \beta) \frac{\partial \nu}{\partial y} &= a
 \end{aligned} \right\} \tag{13}$$

onde:

$$\beta = 45^\circ - \frac{\phi}{2} \tag{14}$$

$$a = b = \pm \frac{X \sin(\psi \pm \beta) - Y \cos(\psi \pm \beta)}{(\sigma_1 + \sigma_3 + 2c \cot g \phi) \sin \phi \cos(\psi \pm \beta)} \tag{15}$$

A derivada total $\frac{\partial \xi}{\partial x}$ pode ser escrita:

$$\frac{\partial \xi}{\partial x} = \frac{\partial \xi}{\partial x} + \frac{\partial \xi}{\partial y} \frac{\partial y}{\partial x} = \frac{\partial \xi \partial y}{\partial y \partial x} - \frac{\partial \xi}{\partial y} \tan(\psi + \beta) - b \tag{16}$$

Essa equação é muito útil devido à relação que segue. No sistema de coordenada xy na curva com inclinação

$$\frac{\partial y}{\partial x} = \tan(\psi + \beta)$$

a equação se reduz, então, como segue:

$$\frac{\partial \xi}{\partial x} = -b \tag{17}$$

Nota-se que $\operatorname{tg}(\psi + \beta)$ é exatamente a inclinação da linha de deslizamento (Figura 01-b). Sendo assim a equação (17) fornece a relação entre tensões ao longo da linha

de deslizamento. Com tratamento similar para $\frac{\partial \nu}{\partial x}$, obtém-se a relação de tensões ao longo da outra linha de deslizamento.

$$\frac{\partial \nu}{\partial x} = a \tag{18}$$

Se a força do corpo, isto é, o peso for considerado 0 (zero), $\gamma = 0$, então a e b são ambos equivalentes a 0 (zero), assim, ao longo de um dos grupos de linhas de deslizamento, ξ é constante, enquanto que ao longo do segundo grupo, ν é constante.

2.1. CONSTRUÇÃO GEOMÉTRICA DE UM CAMPO DE LINHAS DE DESLIZAMENTO

Com o objetivo de conduzir a uma melhor compreensão dos conceitos básicos de campo de linhas de deslizamento será, então, realizada a apresentação da construção geométrica desse campo, de acordo com PRAGER (1953). Tal sugestão consiste no uso de dois planos denominados plano de tensão e plano físico (Figura 02).

Considerando que o ponto P está passando para o estado de escoamento plástico, o vetor de tensão atuante, nesse ponto, irá depender da orientação das áreas desse

elemento. A Figura 02 mostra os vários elementos de área nos quais as tensões normais atuam em relação ao plano xy . Esses elementos de área que na realidade contêm o ponto P estão mostrados separadamente para uma melhor compreensão. Os lados hachurados da Figura 02-b representam o material. As tensões estão atuando do lado não hachurado para o lado hachurado.

É conveniente identificar o elemento de área pela direção do mesmo em relação ao plano xy ao invés de indi-

cá-lo pela sua direção normal. Dessa forma os ângulos deverão ser medidos no sentido anti-horário a partir do eixo y negativo.

Pode-se observar na Figura 02-a o círculo de Mohr para o estado de tensões do ponto P do plano físico. Esse ponto é o pólo desse círculo e é obtido desenhando uma linha reta no plano de tensões por qualquer ponto de tensão, A ou B, paralela ao traçado no plano físico, sobre o qual a tensão atua, até interceptar o círculo de Mohr.

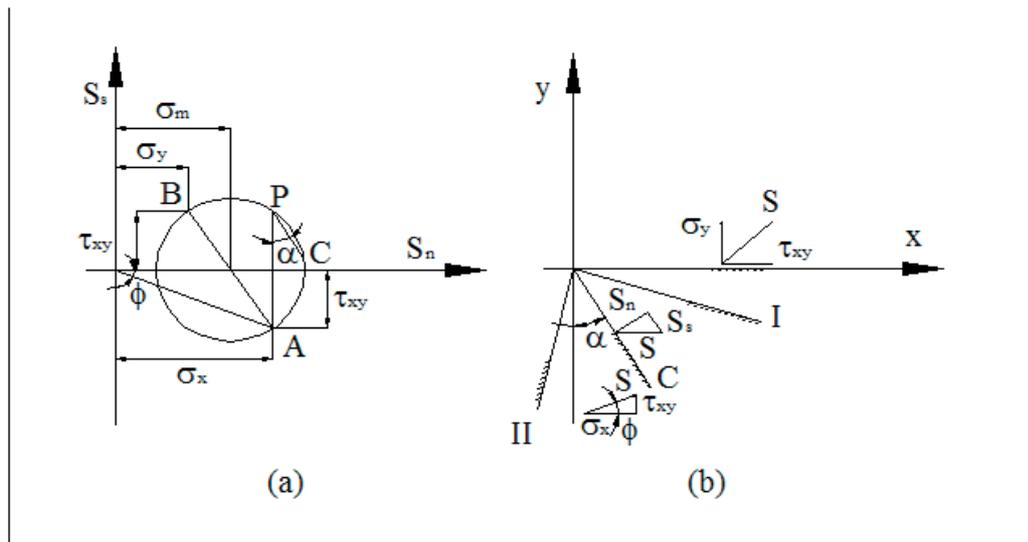


Figura 2 - Plano de tensões (a) e plano físico (b)

Os pontos de maior e menor ordenadas, I e II, no círculo de Mohr da Figura 03 correspondem à máxima e à mínima tensões cisalhantes e, por definição, são denominados de $\pm k$. As direções dessas tensões são dadas pelos segmentos de reta PI e PII respectivamente. Por definição, essas direções serão chamadas de direção α , primeira direção de cisalhamento, e direção β , segunda direção de cisalhamento.

Com base nesses conceitos, a construção geométrica do campo de linhas de deslizamento pode ser obtida fazendo-se uso do seguinte fato: Quando se desloca, ao longo da linha de deslizamento no plano físico, o pólo do círculo de Mohr forma um cicloide no plano de tensões. Isto ocorre quando o círculo rola sem deslizar, ao longo da tangente superior $\tau = k$, se movido ao longo da linha α e ao longo da tangente inferior $\tau = -k$, para a linha β como mostra a Figura 04 (PRAGER, 1953).

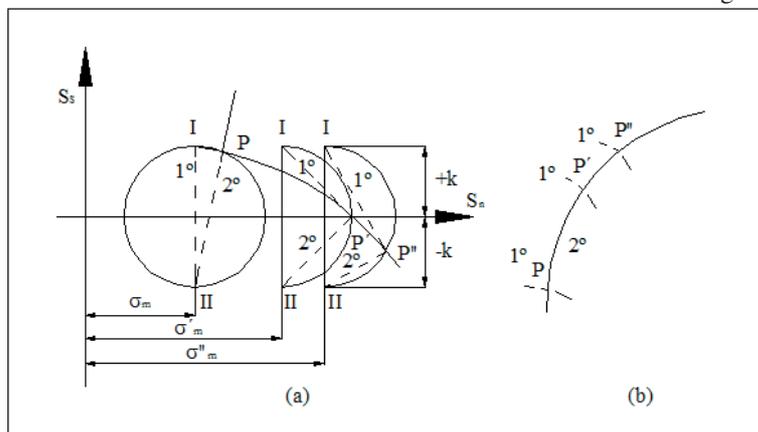
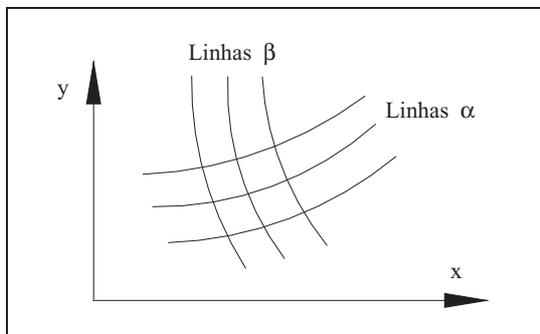


Figura 3 - Traçado ciclóide do pólo no plano de tensões (a) e correspondente linha de deslizamento no plano físico (b).

Figura 4 - Famílias de linhas α e β .

Dessa maneira assume-se o estado de tensões como conhecido no ponto P do plano físico da Figura 3-b. O círculo de Mohr e o pólo P podem ser construídos como mostrado na Figura 3-a. As direções da primeira e segunda linhas de deslizamento em P são também conhecidas de PI e PII. Agora, movendo-se ao longo da segunda linha de cisalhamento, linha β , para o ponto P', o pólo P do círculo de Mohr se moverá para P', quando o círculo rolar sobre a linha tangente $S_s = -k$. As tangentes para as duas linhas de deslizamento em P' são dadas pelas direções P'I e P'II como mostrado pelas linhas tracejadas na figura 3-a. Alternativamente como P'II é normal a ciclóide em P' (o ponto II é centro de rotação instantâneo), o elemento da linha de deslizamento em P', no plano físico, é normal ao elemento da ciclóide em P', no plano de tensões. As linhas de deslizamento no ponto P'' podem ser estabelecidas da mesma maneira. No mesmo instante, as tensões σ'_m e σ''_m são determinadas a partir das posições do centro do círculo. É evidente que as ciclóides criadas com este procedimento são as imagens no plano de tensões das linhas de deslizamento do plano físico.

3. APLICAÇÕES

O método de linhas de deslizamento pode ser aplicado para determinação da configuração de colapso em diversos problemas geotécnicos, entre eles: capacidade de carga em fundações, estabilidade de taludes e paredes de contenções, em situações drenadas e não drenadas de carregamentos. A seguir serão mostrados exemplos de utilização de linhas de deslizamento para determinação da carga de colapso em situação não drenada, em fundações e taludes.

do círculo. É evidente que as ciclóides criadas com este procedimento são as imagens no plano de tensões das linhas de deslizamento do plano físico.

3. 1. FUNDAÇÕES

A Figura 5-a mostra a seção de uma fundação corrida, de largura B, na superfície do solo de peso específico γ e resistência ao cisalhamento não drenado C_u . A tensão total na superfície do solo fora é p e deseja-se calcular a carga F_c , que quando aplicada rapidamente irá causar o colapso não drenado da fundação. A Figura 5-b mostra a malha de linhas de deslizamento denominadas α e β , que são compostas por linhas retas e circulares, que se interceptam formando um ângulo de 90° e satisfazem as equações consideradas para o caso.

As tensões totais verticais e horizontais abaixo da fundação e da superfície do solo são tensões principais e as linhas de deslizamento neste caso são inclinadas 45° em relação a horizontal, que é a superfície do solo.

A malha de linhas de deslizamento mostrada na Figura 5-b pode ser simplesmente esboçada da mesma forma que são traçadas as redes de fluxo para casos de percolação no solo.

Considerando o estado de tensão na linha de deslizamento β , ADCEB (Figura 5-b), nota-se que as tensões principais A e B são horizontal e vertical, e construindo-se o círculo de Mohr (Figura 5-c) obtêm-se os estados de tensões em A e B na ruptura como segue:

$$S_A = \frac{F_c}{B} - C_u \quad (19)$$

$$S_B = p + C_u \quad (20)$$

A mudança de tensão de S_A para S_B ao longo da linha de deslizamento ADCEB é dada por $\Delta S = \pm 2C_u \Delta \eta + \gamma \Delta z$, sendo η o ângulo entre a direção principal maior e o eixo y, partindo deste no sentido anti-horário, com sinal negativo para uma linha de deslizamento β . Da geometria (Figura 5-b), tem-se que

$$\Delta \eta = \frac{1}{2} \pi \quad \text{e } z = 0, \text{ então:}$$

$$S_B - S_A = -\pi C_u \quad (21)$$

$$F_c = (2 + \pi) C_u B + pB \quad (22)$$

3. 2. TALUDES

O método de linhas de deslizamento para confinação de colapso, também é utilizado, como será mostrado aqui, para casos de estabilidade de talude carregado em situação não drenada.

A Figura 06 mostra o talude com ângulo i e altura H em solo saturado sobre rocha sã. A resistência ao cisalhamento não drenada do solo é C_u e seu peso específico equivale a γ . Uma tensão normal uniformemente distribuída q é aplicada na superfície e uma tensão normal uniformemente distribuída p ($< q$) é aplicada no talude.

Esboça-se a rede de linha de deslizamento e então se calcula a tensão superficial no colapso q_c para um valor dado de p considerando carregamento não drenado.

A Figura 06 mostra a rede de linhas de deslizamento constituída das linhas α e β , que se interceptam formando um ângulo de 90° e satisfazem as equações relativas a situação e fazem 45° com o plano da tensão de deslizamento β , ABCD, tem-se:

$$\Delta S = -2C_u \Delta \eta + \gamma \Delta z \tag{23}$$

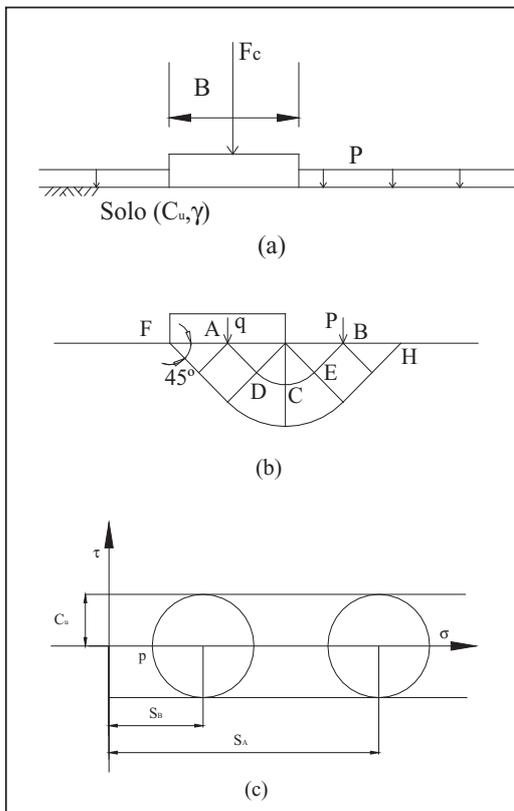


Figura 5 - Rede de linhas de deslizamento em fundações para carregamento não drenado

Na superfície a tensão principal maior é vertical, ao passo que no talude, a tensão principal maior acompanha o declive. Em A e D, respectivamente, tem-se:

$$S_A = q_c - C_u \tag{24}$$

$$S_D = p + C_u \tag{25}$$

Da geometria (Figura 06) a rotação no sentido anti-horário da direção da tensão principal maior de A para D é $\theta = (90^\circ - i)$ e para a linha de deslizamento β , ABCD, tem-se:

$$S_D - S_A = -2C_u \left(\frac{1}{2} \pi - i \right) + \gamma z \tag{26}$$

Onde $z = \Delta z$ é a profundidade do ponto D (Figura 06). Então:

$$q_c = p - \gamma z + C_u (2 + \pi - 2i) \tag{27}$$

Com $i=0$ e $z=0$, a solução se reduz para o caso de fundações e para $i=90^\circ$ para o caso de empuxo ativo em paredes de contenção.

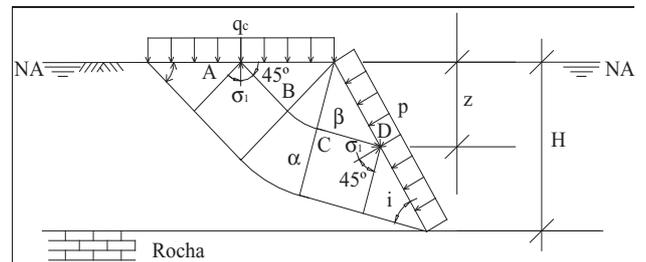


Figura 6 - Rede de linhas de deslizamento em taludes para carregamento não drenado.

4. CONSIDERAÇÕES FINAIS

Como se pode observar, a solução consiste em um campo de linhas de deslizamento em determinada região, a qual satisfaz às condições de contorno a ela diretamente relacionadas, as equações de equilíbrio e o critério de escoamento em cada ponto no seu interior. O campo de tensões é denominado “campo parcial de tensões”. Há, entretanto, neste estudo, uma particularidade conceitual de fundamental importância: a distribuição de tensões fora da região onde ocorre o campo parcial de tensões não é definida. Para que se obtenha uma solução rigorosamente válida, sob o ponto de vista da mecânica, é importante que exista uma distribuição de tensões, fora da região em escoamento, em equilí-

brío com o campo parcial de tensões, e que não viole o critério de escoamento. O campo parcial de tensões, assim estendido para regiões externas àquela em escoamento, denomina-se “campo estendido de tensões”.

Assim, é válido salientar que o campo parcial de tensões, obtido a partir da solução das equações, não conduz necessariamente a solução correta para o problema, nem se pode afirmar que se trata de um dos limites: inferior ou superior, estabelecidos pelo método da análise limite. Porém, quando este campo de tensões puder ser estendido para todo o corpo, além da zona plastificada, satisfazendo sempre às equações de equilíbrio, ao critério de escoamento e às condições de contorno, além de estar associado a um campo de deslocamento compatível, então a solução assim obtida é rigorosamente correta.

5. REFERÊNCIAS

[1] ATKINSON, J. H., *Foundation and Slopes-An Introduction to Applications of Critical State Soil Mechanics*, Mc Grawhill Book Company(UK) Ltd, Oxford, 1981.

[2] CHEN, W.F., *Limit Analysis and Soil Plasticity*, Elsevier Scientific Publishing Company, Amsterdam, 1975.

[3] DIRCEU, A. V., LOPES, F. R. E SANTA MARIA, P. E., *Princípios e Modelos básicos de Análise, Fundações-Teoria e Prática*, Pini, 2ª Edição, São Paulo, 1998.

[4] MENDELSON, A, *PLASTICITY:Theory and Application*, The Macmillan Company, 1ª edição, Nova York, 1968.

[5] PRAGER, W., On the use of singular yield conditions and associated flow rules, *J. Appl. Mech.*, 1953.

[6] PRANDTL, L., *Eindringungsfestigkeit und festigkeit von schneiden*, *Angew. Math. U. Mech* Volume 1, No.15, 1920.

[7] SOKOLOWSKII, V. V., *Statics of granular materials*, Pergamon Press, Oxford, 1965.

[8] WU, T.H., *Soil Mechanics*, Ally and Bacon, Inc, 1ª edição, Boston, 1970.